Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αιγαίου
Εξεταστική Ιανουαρίου 2012, Θέματα στη Μιγαδική Ανάλυση

Διδάσκων: Μ.Γ. Χαραλάμπους

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΡΚΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

1. Να βρείτε σε καρτεσιανή μορφή όλες τις λύσεις της $z^3 = (1+i)(i-1)^2$.

2. Βρείτε την αχτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum \frac{3^n z^n}{\sqrt{n!}}$ και $\sum (3^n + 4n) z^{2n}$.

3. Να προσδιορίσετε τα σημεία όπου η
$$f(z) = (x-i)^5 + 5i(y+4i)^3$$
είναι παραγωγίσιμη, καθώς και την παράγωγο της $f(z)$ στα σημεία αυτά.

4. Η ακέραια συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί $f(z) \leq 5|z|^3$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z.

   Να δείξετε ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 3.

5. Να υπολογίσετε τα εξής ολοκληρώματα:

   (α′) $\displaystyle\int_{|3z+4|=5} \frac{\cos z}{z^{1458}}\, dz$

   (β′) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^{17}(2^4 + z^4)} dz$

   (γ′) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z^2}{z(1-\cos z)} dz$

   (δ′) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Σημείωση: Τα θέματα δεν είναι ισοδύναμα.

1.

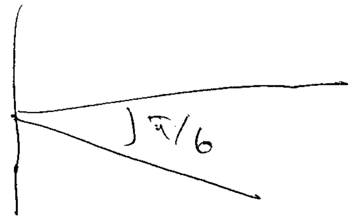
$$z^3 = (1+i)(1-i)^{11} = (1+i)(1-i)(1-i)^{10}$$

$$= 2\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^{10} = 2\left(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\right)^{10}$$

$$= 2\cdot 2^5 \cdot e^{-i\,10\pi/4} = 2^6 e^{-(2\pi+\pi/2)i}$$

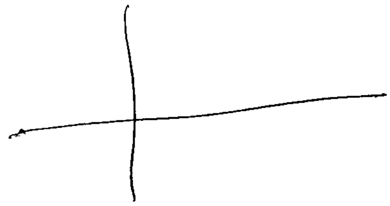
$$z^3 = 2^6 e^{-\pi/2\, i}$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = 2^2 e^{-i\pi/6}$$



$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right)$$

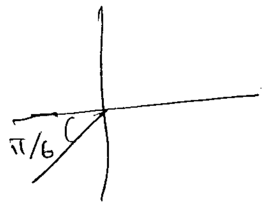
$$= \underline{2(\sqrt{3} - i)}$$



$$z_1 = 4\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \pi/6\right)}$$

$$= 4\, e^{i\frac{(4-1)}{6}\pi} = 4e^{i\pi/2} = 4i$$

$$z_2 = 4\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \pi/6\right)} = 4\, e^{i\frac{7}{6}\pi}$$



$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\right)$$

$$= -2(\sqrt{3} + i)$$

2. $\sum \frac{3^n z^n}{\sqrt{n!}}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{3^n |z|^n}{\sqrt{n!}} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{3^{n-1} |z|^{n-1}} = 3|z| \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Κριτηριο λογου $\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει $\forall z$

$\Rightarrow R = \infty$

$$\sum (3^n + 4n) z^{2n}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{|3^n + 4n| \, |z|^{2n}}{|3^{n-1} + 4(n-1)| \, |z|^{2(n-1)}} = |z|^2 \frac{1 + 4\frac{n}{3^n}}{\frac{1}{3} + 4\left(\frac{n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right)} \to \frac{|z|^2}{\frac{1}{3}} = 3|z|^2$$

Κ.Λ. $\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει για $3|z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

αποκλίνει για $3z^2 > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. $$f(z) = 3(x-i)^5 + 5i(y+4i)^3$$

$$f_x = 15(x-i)^4, \quad f_y = 15i(y+4i)^2$$

Θέλουμε $f_y = i f_x$ – εξισώσεις Cauchy-Riemann

δηλ $$(y+4i)^2 = (x-i)^4$$

$$\Leftrightarrow \quad y+4i = (x-i)^2 = x^2-1-2ix$$
$$\Rightarrow x=-2, \; y = 4-1 = 3$$

ή $$-y-4i = (x-i)^2 = x^2-1-2ix$$
$$\Rightarrow x = 2, \; y = -4+1 = -3$$

Εφόσον οι $f_x = u_x + i v_x$ και $f_y = u_y + i v_y$ είναι σ.σ. το ίδιο ισχύει και για τις u_x, v_x, u_y, v_y.

Συνεπώς τα μόνα σημεία όπου $f'(z)$ υπάρχει είναι τα $(-2,3), (2,-3)$.

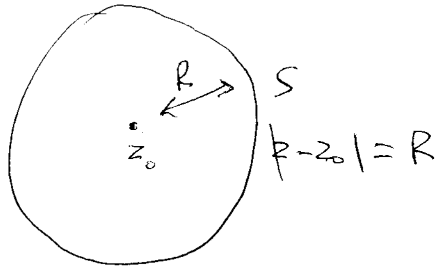
Μάλιστα, αφού $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = f_x(z)$

$$f'(-2,3) = 15(2+i)^4$$

και

$$f'(2,-3) = 15(2-i)^4$$

4. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$



Από τον ΓΟΤC

$$f^{(4)}(z_0) = \frac{4!}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{(z-z_0)^5} \qquad *$$

Τώρα για $|z-z_0| = R$, $|z| \le R + |z_0|$,

$$|f(z)| \le 5|z|^3 \le 5(R+|z_0|)^3 \quad \text{και}.$$

$$\left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^5} \right| \le \frac{5(R+|z_0|)^3}{R^5}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \left| f^{(4)}(z_0) \right| \le \frac{4!}{2\pi} \frac{5(R+|z_0|)^3}{R^5} 2\pi R$$

$$= 4! \, 5 \frac{(R+|z_0|)^3}{R^4} = 5! \frac{1}{R} \left(1 + \frac{|z_0|}{R}\right)^3 \to 0$$

καθώς $R \to \infty$

$$\Rightarrow f^{(4)}(z_0) = 0 \quad \forall z_0$$

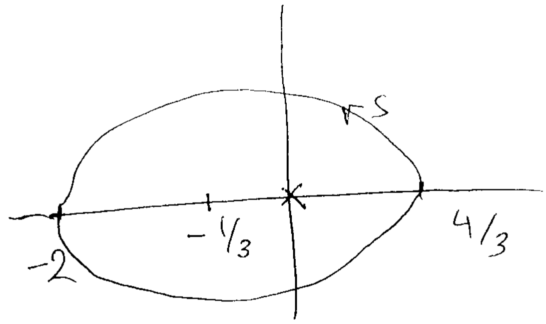
$$\Rightarrow f^{(3)}(z) = A \quad \text{σταθ}$$

$$\Rightarrow f^{(2)}(z) = Az + B$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{A}{2} z^2 + Bz + C$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{A}{6} z^3 + \frac{B}{2} z^2 + Cz + D$$

5 (α) $|3z+1| = 5 \iff \left|z+\frac{1}{3}\right| = 5/3$



ΓΟΤC $\Rightarrow$ $$\int_S \frac{\cos z}{z^{1458+1}} = \frac{2\pi i}{1458!} \cos^{(1458)}(0)$$

Τώρα $\cos' z = -\sin z$, $\cos^{(2)}(z) = -\cos z$, $\cos^{(3)} z = \sin z$, $\cos^{(4)} z = \cos z$ κτλ

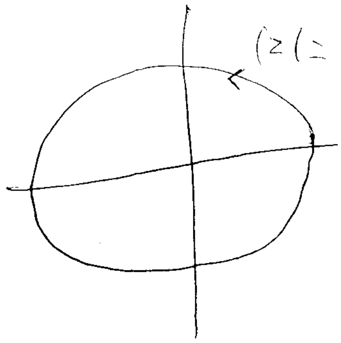
1458 | 4
25 | 364
18
2

$\Rightarrow 1458 = 4 \cdot 364 + 2$

$\Rightarrow \cos^{(1458)} z = \cos^{(2)} z = -\cos z$

$$\Rightarrow \int_{|3z+1|=5} \frac{\cos z}{z^{1459}} = -\frac{2\pi i}{1458!}$$

5 (β)



$$\frac{1}{2^4+z^4} = \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^4} = \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{1-\left(-\left(\frac{z}{2}\right)^4\right)}$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(1-\left(\frac{z}{2}\right)^4+\left(\frac{z}{2}\right)^8-\left(\frac{z}{2}\right)^{12}+\left(\frac{z}{2}\right)^{16}-\dots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^{17}(2^4+z^4)} = \frac{1}{2^4}\left(1-\frac{1}{2^4}z^{-13}+\dots+\frac{1}{2^{16}}\frac{1}{z}-\frac{1}{2^4}z^3+\dots\right.$$

$$\to \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{17}(2^4+z^4)},0\right) = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{2^{20}}$$

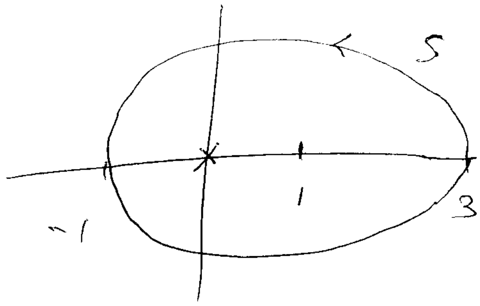
Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^{17}(2^4+z^4)} = 2\pi i\,\frac{1}{2^{20}} = \frac{\pi i}{2^{19}}.$$

<u>Σημείωση:</u> $z^4+2^4=0 \Rightarrow z^4=-2^4 \Rightarrow |z|^4=|2|^4$

$\Rightarrow |z|=|2|$, οπότε τα σημεία z είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

(γ)



$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z(1-\cos z)} =$$

$$= \frac{z^2 - \frac{1}{3!} z^6 + \frac{1}{5!} z^{10} - \dots}{z\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3!} z^4 + \frac{1}{5!} z^8 - \dots}{z\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)} = \frac{g(z)}{z}$$ όπου η

$$g(z) = \frac{1 - \frac{1}{3!} z^4 + \dots}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots}$$ είναι ακέραια εφόσον οι σειρές συγκλίνουν $\forall z$

ΟΤC $\Rightarrow$

$$\int_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \, g(0) = 2\pi i \frac{1}{\frac{1}{2!}} = 4\pi i$$

5 (δ)

$$q(z) = z^4 + 13z^2 + 36 = (z^2+9)(z^2+4) = 0$$

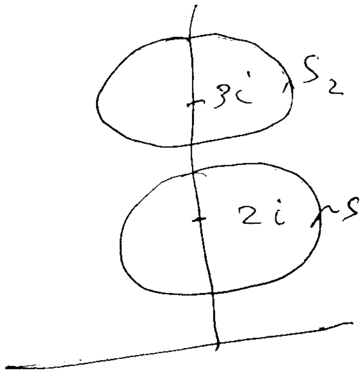
$$\Leftrightarrow \quad z = \pm 3i, \quad z = \pm 2i$$

Εφόσον $\deg q = 4 \geq 2 + \deg(5x^2) = 2+2$,

απ θεωρία

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5x^2}{x^4+13x^2+36} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f(z), 2i) + \mathrm{Res}(f(z), 3i)\right)$$

όπου $\quad f(z) = \dfrac{5z^2}{q(z)} = \dfrac{5z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)(z-2i)}$



$$\Rightarrow I = \int_{S_1} \frac{5z^2}{(z-2i)(z+2i)(z^2+9)} + \int_{S_2} \frac{5z^2}{(z-3i)(z+3i)(z^2+4)}$$

$$= 2\pi i \frac{-20}{4i \cdot 5} + 2\pi i \frac{-45}{6i(-5)}$$

$$= -2\pi + 3\pi = \pi$$

Λόγω αρτιότητος της υπο ολοκλήρωση συνάρτησης

$$\int_0^{\infty} \frac{5x^2\,dx}{x^4+13x^2+36} = \frac{1}{2} I = \pi/2$$