Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αιγαίου
Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2011, Θέματα στη Μιγαδική Ανάλυση

Διδάσκων: Μ.Γ. Χαραλάμπους

1. Να γράψετε σε καρτεσιανή μορφή τους αριθμούς $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^8}{(i-1)^{10}}$ και $w = Logi^{Logi}$.

2. Βρείτε την αχτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum \dfrac{z^{3n}}{(4n)!}$ και $\sum \dfrac{3+4^n}{5+6^n} z^{7n}$.

3. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις Cauchy–Riemann για μια συνάρτηση $f(z)$ ισχύουν σε σημείο z_0 αν και μόνο αν $f_y(z_0) = if_x(z_0)$.

   Σε ποια σημεία είναι η $f(z) = (3x+i)^3 + 3(iy+3)^3$ παραγωγίσιμη; Δώστε την παράγωγό της στα σημεία αυτά.

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

   (α′) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2+3}{x^4+7x^2+12}dx$

   (β′) $\displaystyle\int_{|z+5|=2} \frac{ze^z}{(z+4)^5}dz$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_{|z-2|=3} f(z)$, $\int_{|z+1|=3} f(z)$, και $\int_\gamma f(z)$ όπου

$$f(z) = \frac{(z+i)^2}{3z^3+10z^2+3z}$$

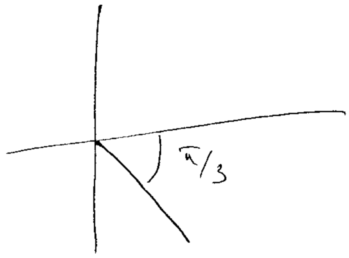
   και γ είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $-2, -3+i, -4, -3-i$.

   Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\sin x}{5+3\cos x}$.

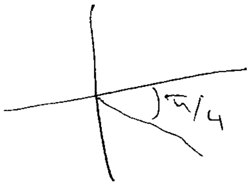
Καλή Επιτυχία

Σημείωση: Τα θέματα δεν είναι ισοδύναμα.

①



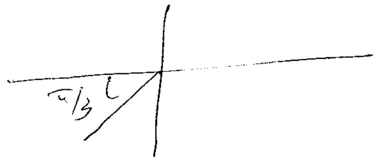
$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2e^{-i\pi/3}$$



$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

$$\Rightarrow z = 2^8 e^{-i\frac{8\pi}{3}} \Big/ 2^5 e^{-i10\pi/4}$$

$$= 2^3 e^{-i8\pi/3} e^{i2\pi} e^{i\pi/2} = 2^3 e^{-i2\pi} e^{-i2\pi/3} \cdot 1 \cdot i$$



$$= 2^3 i\, e^{-i2\pi/3}$$
$$= 2^3 i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 4(\sqrt{3} - i)$$

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$
$$\Rightarrow \operatorname{Log} i = \log|i| + i\pi/2 = i\pi/2$$
$$\alpha^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log}\alpha}$$
$$\Rightarrow w = \operatorname{Log} i^{\operatorname{Log} i} = e^{\operatorname{Log} i \cdot \operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)}$$
$$= e^{i\pi/2\left(\log \pi/2 + i\pi/2\right)} = e^{-\pi^2/4} e^{i\frac{\pi}{2}\log \pi/2}$$
$$= e^{-\pi^2/4}(\cos\theta + i\sin\theta), \text{ όπου } \theta = \frac{\pi}{2}\log \pi/2$$

(2.) $$\sum \frac{z^{3n}}{(4n)!}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{|z|^{3n}}{|z|^{3(n-1)}} \frac{(4(n-1))!}{(4n)!} = |z|^3 \frac{1}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)4n}$$

$$\text{Άρα } \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \to |z|^3 \cdot 0 = 0 \quad \forall z$$

Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει για $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow R = \infty$$

$$\sum \frac{3+4^n}{5+6^n} z^{7n}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{|z|^{7n}}{|z|^{7(n-1)}} \frac{3+4^n}{3+4^{n-1}} \frac{5+6^{n-1}}{5+6^n} = |z|^7 \frac{\frac{3}{4^n}+1}{\frac{3}{4^n}+\frac{1}{4}} \frac{\frac{5}{6^n}+\frac{1}{6}}{\frac{5}{6^n}+1}$$

$$\to |z|^7 \frac{0+1}{0+\frac{1}{4}} \frac{0+\frac{1}{6}}{0+1} = |z|^7 \frac{4}{6} = |z|^7 \frac{2}{3} \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει όταν

$$|z|^7 \frac{2}{3} < 1 \Leftrightarrow |z| < \left(\frac{3}{2}\right)^{1/7}$$

και αποκλίνει όταν $|z|^7 \frac{2}{3} > 1 \Leftrightarrow |z| > \left(\frac{3}{2}\right)^{1/7}$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/7}$$

(3) $$f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

Cauchy-Riemann στο $z_0 \iff u_x(z_0) = v_y(z_0)\ ,\ u_y(z_0) = -v_x(z_0)$

$$\Rightarrow\ f_y(z_0) = u_y(z_0) + i\ v_y(z_0) = -v_x(z_0) + i\,u_x(z_0)$$
$$= i\left(u_x(z_0) + i\,v_x(z_0)\right) = i\,f_x(z_0)$$

Αντιστρόφως, $f_y(z_0) = i f_x(z_0) \Rightarrow u_y(z_0) + i\,v_y(z_0) = i\left(u_x(z_0) + i\,v_x(z_0)\right)$

$$\Rightarrow u_y(z_0) + i\,v_y(z_0) = -v_x(z_0) + i\,u_x(z_0)$$
$$\Rightarrow u_y(z_0) = -v_x(z)\ ,\ v_y(z_0) = u_x(z_0) \iff \text{C-R στο } z_0.$$

$$f(z) = (3x+i)^3 + 3(iy+3)^3$$

$$\Rightarrow\ f_x = 3(3x+i)^2 \cdot 3 = 9(3x+i)^2$$
$$f_y = 9(iy+3)^2\, i$$

Θέλουμε $f_y = i f_x$ δηλ. $9i(iy+3)^2 = 9i(3x+i)^2$

$\iff (iy+3)^2 = (3x+i)^2 \iff$ ① $3x+i = iy+3$, οπότε $x=1, y=1$

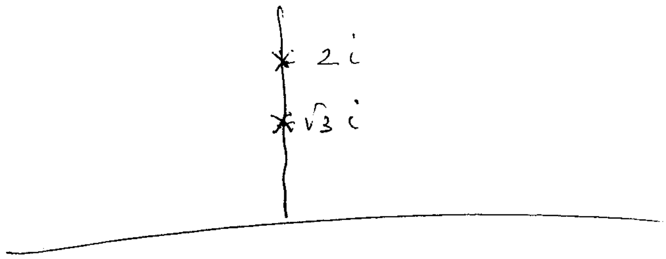
ή ② $3x+i = -iy-3$, οπότε $x=-1, y=-1$

Επειδή οι μερικές είναι παραγωγίσιμες, από γνωστό θεώρημα η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη ακριβώς στα σημεία $z_1 = (1,1)$, $z_2 = (-1,-1)$

Μάλιστα, $f'(z_1) = u_x(z_1) + i\,v_x(z_1) = f_x(z_1) = 9(3+i)^2 = 9(8+6i)$

και $f'(z_2) = f_x(z_2) = 9(-3+i)^2 = 9(8-6i)$.

(4.) (α) $z^4+7z^2+12 = (z^2+3)(z^2+4) = (z+\sqrt{3}i)(z-\sqrt{3}i)(z+2i)(z-2i)$



Από θεώρημα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2+3}{x^4+7x^2+12} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, \sqrt{3}i) + \operatorname{Res}(f, 2i) \right)$$ όπου

η $f(z) = \dfrac{4z^2+3}{z^4+7z^2+12}$ έχει απλούς πόλους στα

$\sqrt{3}i$ και $2i$.

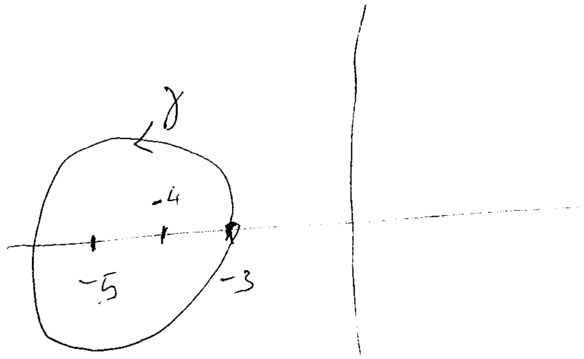
$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \left(\frac{4(-3)+3}{2\sqrt{3}i\,(-3+4)} + \frac{4(-4)+3}{(-4+3)\,4i} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{-9}{2\sqrt{3}} + \frac{-13}{-4} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{13}{2} - \frac{9}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (13\sqrt{3} - 18)$$

$$= \frac{\pi}{6} (39 - 18\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} (13 - 6\sqrt{3})$$

4. β



Από Γ.Ο.Τ.C

$$I = \int_{|z+5|=2} \frac{z e^{z}}{(z+4)^5} = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(-4)$$

όπου

$$f(z) = z e^{z}$$

$$f'(z) = e^{z} + z e^{z}$$

$$f^{(2)}(z) = 2 e^{z} + z e^{z}$$

$$f^{(3)}(z) = 3 e^{z} + z e^{z}$$

$$f^{(4)}(z) = 4 e^{z} + z e^{z}$$

$$f^{(4)}(-4) = 4 e^{-4} - 4 e^{-4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = 0.$$

(5.)

$$3z^2+10z+3z = z(3z^2+10z+3) = z(3z+1)(z+3)$$

Η $$f(z) = \frac{(z+i)^2}{z(z+3)(3z+1)} = \frac{(z+i)^2}{3z(z+3)(z+\frac{1}{3})}$$

έχει απλούς πόλους στα $0, -\frac{1}{3}, -3$

$$\text{Res}(f,0) = \frac{(-i)^2}{3\cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

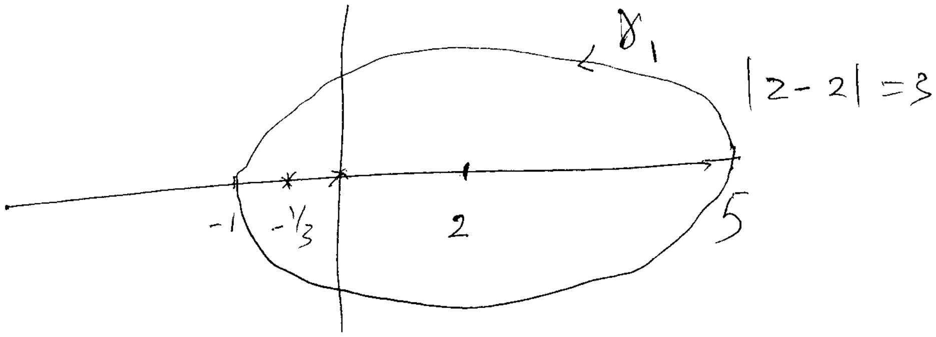
$$\text{Res}(f,-\tfrac{1}{3}) = \frac{(-\frac{1}{3}+i)^2}{3(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}+3)} = \frac{(-1+3i)^2}{-3\cdot 8} = \frac{-9+1-6i}{-24}$$

$$= \frac{8+6i}{24} = \frac{4+3i}{12} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$$

$$\text{Res}(f,-3) = \frac{(-3+i)^2}{(-3)(-9+1)} = \frac{9-1-6i}{24} = \frac{8-6i}{24} = \frac{4-3i}{12}$$

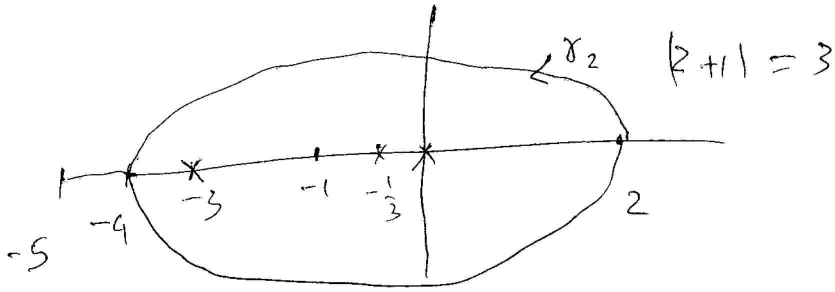
$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{4}i$$

5.



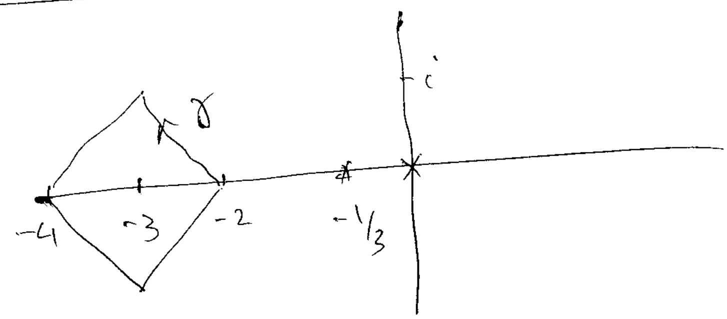
$$\int_{\gamma_1} f(z) \overset{\Theta OY}{=} 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}\left(f,-\tfrac{1}{3}\right)\right) = 2\pi i\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}i\right)$$

$$= -\pi/2$$



$$\int_{\gamma_2} f(z) \overset{\Theta OY}{=} 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}\left(f,-\tfrac{1}{3}\right)+\mathrm{Res}(f,-3)\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}i+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}i\right) = \frac{2\pi i}{3}$$



$$\int_{\gamma} f(z) \overset{\Theta OY}{=} 2\pi i\ \mathrm{Res}(f,-3) = 2\pi i\,\frac{(4-3i)}{12}$$

$$= \frac{\pi}{6}(4i+3) = \frac{\pi}{6}(3+4i)$$

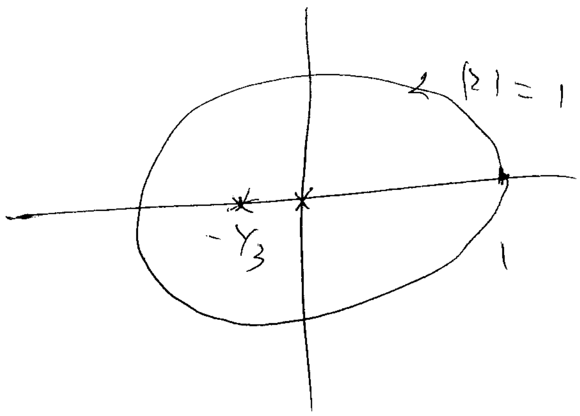
$$= \frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi i$$

(5) Από Θεωρία

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\sin x}{5+3\cos x}\,dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{zi}\,\frac{1+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

$$= -\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\frac{2i+\left(z-\frac{1}{z}\right)}{10+3\left(z+\frac{1}{z}\right)} = -\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\frac{2iz+z^2-1}{10z+3z^2+3}$$

$$= -\int_{|z|=1} \frac{(z+i)^2}{3z^3+10z^2+3z} = -\int_{|z|=1} f(z)$$



Προφανώς $I = -\int_{|z|=1} f(z) \overset{\Theta O Y}{=} -\int_{\gamma_1} f(z) = \pi/2$