ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

10 Σεπτεμβρίου 2002

1. Πόσα στοιχεία τάξης 2 περιέχει η S_4; [1]

2. Εξετάστε αν η ομάδα $U(\mathbb{Z}_8)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_8$ είναι ισομορφική με την $(\mathbb{Z}_5, +)$. [1.5]

3. Δίνονται οι μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_6$ με $\sigma = (13524)(235)$ και
$$\tau = (12465)^{-1}(2461)(123546)(24631)^{-1}.$$
Να εκφράσετε τις σ, τ σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους. Κατόπιν, να υπολογίστετε τα $\sigma\tau$, $\sigma^2\tau^3$ και $\sigma^{50}\tau^{150}$. [1.5]

4. Εξετάστε ως προς την λύση του στο $\mathbb{Z}_8$ το παρακάτω σύστημα
$$\begin{array}{rcrcl} 5x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & 6y & = & 2 \end{array}$$
[1]

5. Έστω τα πολυώνυμα $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$ και $g(x) = x^2 - 15x + 14$ στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Προσδιορίστε τους πρώτους p για τους οποίους ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(f(x), g(x))$ έχει βαθμό ακριβώς 1. [1.5]

6. Έστω R ένας πεπερασμένος μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι είτε αντιστρέψιμο είτε διαιρέτης του μηδενός. [1.5]

7. Έστω το ιδεώδες I του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$ με $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(2) = 0\}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}[x]/I \cong \mathbb{Q}$ και βρείτε, αν υπάρχει, το αντίστροφο του $(x^3 + 1) + I$. [2]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής